УДК 330

УЧЕТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОТЕРЬ В НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

БРОДСКИЙ Ю. Б.

ТИМОНИН Ю. А.

Житомир

ТИМОНИН А. Ю.

кандидат технических наук

Санкт-Петербург (Россия)

Модели экономического роста обоснованно отнесены к основному классу моделей математической экономики. Если в области макроэкономики применяют модели Кобба – Дугласа, Харрода – Домара, Солоу, Неймана и др., то в области микроэкономики модели роста ограничены производственными функциями [1, 2, 3 и др.]. Развитие моделей экономического роста можно связать, в частности, с учетом факторов, которые приводят к потерям и снижению темпов роста. Если рассматривать экономический рост предприятия за счет капитализации прибыли, то к потерям следует отнести налоги, процентные платежи, дивиденды и другие факторы. Попытки учета потерь в известных моделях роста наталкиваются на ряд принципиальных трудностей, связанных с согласованием базовых переменных модели и переменных, которые описывают потери. Поэтому формирование моделей экономического роста с учетом потерь представляет актуальную проблему, в первую очередь, для объектов микроэкономики.

Перспективной, с точки зрения учета потерь, можно считать концептуальную модель экономических систем (ЭС) [4]. Эта модель получены теоретическим путем из формальных законов ЭС, которые описывают рост стоимости в базисе переменных: стоимость, стоимостный потенциал. В работах [5 – 7] показаны результаты детализации, концептуальной модели и связь параметров модели с отчетной информацией. Однако в этих работах недостаточное внимание уделено методологии учета дифференциальных потерь, которая важна для обоснования метода экономико-физических аналогий, В статье рассматривается метод учета дифференциальных потерь в концептуальной модели и его применение для формирования общего уравнение роста стоимости.

Объектом исследований является концептуальная модель ЭС [4] в виде неоднородного дифференциального уравнения первого порядка (ДУ-1)

$$X' = \varphi X + v. \tag{1}$$

Концептуальная модель ЭС получена путем объединения уравнений целостности $x = v + y$ и доходности $y = \varphi\int x dt$, где $x = X' = \dfrac{dX}{dt}$, $v = V' = \dfrac{dV}{dt}$, $y = Y' = \dfrac{dY}{dt}$ – соответственно потоки полной, основной и дополнительной стоимости; φ – стоимостный потенциал.

Для моделирования экономических потерь воспользуемся аналогией с моделями математической физики, которые, по сути, описывают потери энергии с помощью параметров, характеризующих дифференциальные отношения между переменными. При таком подходе фазовые переменные модели должны удовлетворять ряду требований [4], в частности, одна переменная должна отражать характер субстанции, вторая – характер потенциала, а их произведение должно иметь размерность энергии. Поскольку эти требования выполняются в концептуальной модели ЭС, определим экономические потери на основе дифференциальных зависимостей переменных.

В основу метода учета потерь положены следующие положения. Во-первых, потери стоимости можно связать с потенциалом потерь ϕ^-. Тогда общий потенциал ЭС можно представить в виде разности потенциалов роста ϕ^0 и потерь ϕ^-, $\phi = \phi^0 - \phi^-$. Во-вторых, потенциал потерь можно представить суммой слагаемых $\varphi^- = \sum \varphi_n^-$. В-третьих, положим, что слагаемые потенциала потерь пропорциональны производным стоимости

$$\varphi_n^- = a_n X^{(n)}, \tag{2}$$

где коэффициенты a_n – параметры потерь.

Тогда, для трех слагаемых потерь, выражение общего потенциала ЭС примет вид

$$\varphi = \varphi^0 - (\varphi_0^- + \varphi_1^- + \varphi_2^-). \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1), получим уравнение, которое описывает рост стоимости с учетом потерь в виде нелинейного неоднородного ДУ-2 [5]

$$a_2 XX'' + (1 + a_1 X)X' + (a_0 X - \varphi^0)X = v. \tag{4}$$

Ввиду того, что при выводе (4) отражены все возможные отношения между переменными, уравнение (4) можно рассматривать как общее уравнение роста стоимости. Уравнение (4) представляет собой композицию $X' = \varphi^0 X - x^- + v$, составленную из уравнения экспоненциального роста $X' = \varphi^0 X$ и уравнения нелинейных потерь $x^- = a_2 XX'' + a_1 XX' + a_0 XX$. Определение нелинейных потерь в виде $x_n^- = a_n XX^{(n)}$ вводит новый классификационный признак, в основе которого лежит характер дифференциальной зависимости. Поэтому такие потери стоимости, как налоги, процентные платежи, дивиденды и другие факторы, полезно классифицировать в соответствии с этим признаком.

Общее уравнение роста (4) можно сравнить с уравнениями математической физики, которые описывают потери энергии. Для этого рассмотрим (4) как уравнение потерь с учетом роста и сравним его с уравнением электрической *R*, *L*, *C*-цепи вида $Li'' + Ri' + i/C = u$, которое описывает потери электрической энергии, связывает ток *i* и напряжение *u* с помощью таких параметров цепи, как сопротивление (*R*), индуктивность (*L*) и емкость (*C*). Отметим общность и различие уравнений экономических систем и физических объектов. Формально, общность проявляется в том, что модель ЭС содержит уравнение потерь, которое имеет такую же конструкцию, что и топологические уравнения математической физики. Различие состоит в том, что модель ЭС содержит уравнение роста, которое принципиально отсутствует в описаниях физических объектов. Кроме того, уравнение потерь имеет нелинейный характер.

Общность уравнений роста и *R*, *L*, *C*-цепи позволяет сформировать метод экономико-физических аналогий [6], который основан на том, что общее уравнение роста рассматривается как уравнение потерь. Тогда коэффициенты при производных в ДУ-2 (4) можно рассматривать как нелинейные *R*, *L*, *C*-параметры. При этом электрической ток рассматривается как аналог потока стоимости, а напряжение – как аналог потенциала роста. Тогда аналогии дают основания для следующих названий параметрам потерь: $L_e = a_2 X$ – экономическая индуктивность; $R_e = 1 + a_1 X$ – экономическое сопротивление; $C_e = 1 / (a_0 X - \phi^0)$ – экономическая емкость, которая зависит от потенциала роста. Метод экономико-физических аналогий позволяет описывать ЭС как *R*, *L*, *C*-цепь с нелинейными параметрами.

Решение ДУ-2 (4) описывает полное движение стоимости как сумму свободного и принужденного движения $S = S_{пр} + S_{св}$. Свободное движение $S_{св}$ отражает поведение в виде $S_{св} = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}$, где B_1, B_2 – начальные значения стоимости; $p_{1,2}$ – корни характеристического уравнения $p^2 + 2\delta p + \omega^2 = 0$, ω – резонансная частота; δ – декремент затухания. В зависимости от знака выражения $\delta^2 - \omega^2$, который приводит к действительным или комплексным корням характеристического уравнения, функция стоимости описывает апериодический или колебательный процессы. Можно сказать, что выражение $\delta^2 - \omega^2$ описывает точку бифуркации, переход через которую приводит к разным режимам поведения. Свободное движение стоимости описывается выражением вида $S_{св} = Ae^{-\delta t} \sin \omega_{св} t$. Колебательные процессы возникают в связи с наличием реактивных *LC*-элементов, которые формируют противоположные фазовые сдвиги функции стоимости. и связаны с комплексными корнями характеристического уравнения. Полное движение стоимости описывает переходный процесс при постоянных значениях параметров потерь. Если параметры потерь изменяются, тогда необходим учет этих изменений, который задает новые асимптоты переходного процесса. Движение стоимости с учетом колебаний полезно для описания таких экономических явлений, как кризис и стагнация. Поскольку, в общем случае, нелинейные и неоднородные ДУ-2 не имеют строгих аналитических решений, можно использовать приближенные методы решения, например, в конечно-разностной форме. Из общего уравнения экономического роста (4) можно получить ряд частных уравнений. При $a_2 = 0$ ДУ-2 (4) вырождается в нелинейное логистическое уравнение

$$(1 + a_1 X)X' + (a_0 X - \varphi^0)X = v. \tag{5}$$

Уравнение (5) можно считать нелинейным обобщением известного линейного логистического уравнения Ферхюльста $X' = \varphi^0 (1 - S / b_0) X$ [7]. Перепишем (5) в виде, принятом для логистических уравнений $(1 + a_1 X) X' = \varphi^0 (1 - X / b_0) X$, где $b_0 = \varphi^0 / a_0$ – асимптотический порог логистической функции. Отличие уравнения (5) от эвристического уравнения Ферхюльста состоит в нелинейном коэффициенте ($1 + a_1 X$), который отражает резистивные потери. Уравнение (5) при $\nu = 0$ имеет аналитическое решение, которое задает в неявном виде обобщенную логистическую функцию

$$X(t) = g(b_0 - X(t))^{1+G} e^{\varphi^0 t}, \qquad (6)$$

где g – величина, отражающая начальное значение; $G = a_1 b_0$ – интегральный показатель потерь.

Обобщение проявляется в том, что при $a_1 = 0$ уравнение (5) сводится к уравнению Ферхюльста, а его решение (6) – к простой логистической функции $X(t) = b_0 g e^{\varphi^0 t} / (1 + g e^{\varphi^0 t})$. В случае применения обобщенной логистической функции для описания стагнация, возможности моделирования расширяются за счет параметра резистивных потерь a_1.

При больших значениях параметра емкостных потерь $b_0 \to \infty$, $a_0 \approx 0$ нелинейное логистическое уравнение (5) вырождается в нелинейное экспоненциальное уравнение вида

$$(1 + a_1 X) X' = \varphi^0 X. \qquad (7)$$

Отличие уравнения (7) от известного уравнения Мальтуса $X' = \varphi^0 X$ состоит в нелинейном коэффициенте $(1 + a_1 X)$ при производной стоимости, который имеет теоретическое происхождение [7]. Уравнение (7) имеет аналитическое решение

$$X(t) e^{a_1 N(t)} = c e^{\varphi^0 t}. \qquad (8)$$

Выражение (8) в неявном виде описывает обобщенную экспоненциальную функцию, которая учитывает резистивные потери. Обобщение проявляется в том, что при $a_1 = 0$ уравнение (7) сводится к линейному экспоненциальному уравнению $X' = \varphi^0 X$, а его решение (8) – к простой экспоненциальной функции.

ВЫВОДЫ

Сформулирован метод учета потерь в концептуальной модели экономической системы на основе дифференциальных зависимостей переменных. С помощью этого метода сформирована нелинейная модель роста экономической системы, которая описывает рост стоимости в экономических системах с учетом потерь. Общность модели роста экономической системы и моделей физических объектов использована для обоснования метода экономико-физических аналогий. Нелинейные уравнения роста первого порядка, полученные как частные случаи, задают обобщенные логистическую и экспоненциальную функции, которые отличаются учетом резистивных потерь стоимости. С помощью нелинейной модели роста экономической системы можно описать различные экономические явления, включая стагнацию и кризис. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. **Колемаев В. А.** Математическая экономика : Учебник для вузов.– М. : Юнити-Дана, 2002.– 390 с.
2. Моделирование экономической динамики.– 2-е изд., испр / Клебанова Т. С., Раевнева Е. В., Сергиенко Е. А., Дубровина Н. А., Полякова О. Ю., Милов А. В.– Х. : Издательский Дом «ИНЖЭК», 2005.– 244 с.
3. **Хачатрян Н. К.** Математическое моделирование экономических систем.– М. : Экзамен, 2008.– 158 с.
4. **Тимонин Ю. А.** Формальная теория абстрактных экономических систем (Теория движения стоимости) : Учебное пособие.– Житомир : ІПСТ, 2007.– 60 с.
5. **Грабар І. Г., Тимонін Ю. О., Бродський Ю. Б.** Універсальна модель системи : методологічний аспект // Вісник ЖНАЕУ.– Житомир, 2009.– № 1.– С. 358 – 366.
6. **Тимонин Ю. А., Тимонин А. Ю.** Моделирование экономического кризиса по методу аналогий / Труды международной научной школы МА БР 2010.– СПб. : Изд-во СПбГУАП, 2010.– С. 340 – 345.
7. **Тимонин Ю. А., Бродский Ю. Б.** Исследование нелинейной логистической функции для моделирования экономической стагнации // Вісник ЖНАЕУ.– Житомир, 2010.– № 1(26). Т. 2.– С. 31 – 38.